EXERCICE N°1 — 7 points — PRINCIPALE 2013

Dans la figure ci-dessous, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x=3$, $x=5$ et $y=\ln 3$.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de $\mathcal{E}$.

1°) Hachurer $\mathcal{E}$.

2°) a) Vérifier que $f(5)=2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5,\ln 3)$ et $(3,2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3\leq \mathcal{A}\leq 2\ln 3$.

3°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3,+\infty[$.

4°) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe C_g.

5°) Soit $\mathcal{E}'$ la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x=\ln 3, x=2\ln 3$ et $y=5$.

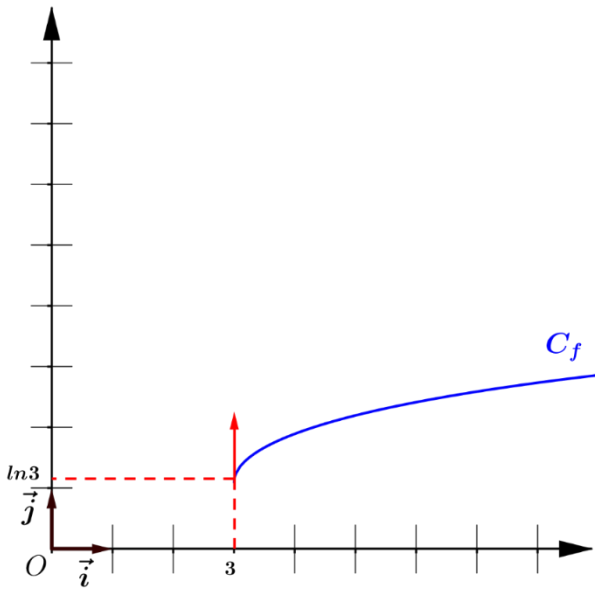
On désigne par $\mathcal{A}'$ l'aire (en unité d'aire) de $\mathcal{E}'$.

a) Hachurer $\mathcal{E}'$.

b) Montrer que $\mathcal{A}'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6°) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3,+\infty[$, $g(x)=\dfrac{e^x+9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$ et en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.



: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com